Ellipsoïde de John - Löwner

Dans la suite, pour $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on note q_S la forme quadratique associée i.e. $q_S(x) = {}^t x S x$ et on note $E_S = \{x \in \mathbb{R}^n,\ q_S(x) \leqslant 1\}$.

Proposition Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
Alors, $\mathrm{Vol}(E_S) = \mu(S)\,\mathrm{Vol}(B)$ où $\mu(S) = (\det S)^{-1/2}$ et B désigne la boule unité de $\mathbb{R}^n$.

D'après le théorème spectral, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que :
$$S = {}^tP \,\mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n) P \quad \text{avec } a_1, \dots, a_n > 0$$
En particulier,
$$\mu(S) = \left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{-1/2}$$

En effectuant le changement de variables $x = Pz$, de jacobien $|\det P| = 1$,
$$\mathrm{Vol}(E_S) = \int_{q_S(z) \leqslant 1} dz = \int_{a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2 \leqslant 1} dx_1 \dots dx_n$$
Donc, en effectuant le changement de variables $x_i = \frac{t_i}{\sqrt{a_i}}$,
$$\mathrm{Vol}(E_S) = \frac{1}{\sqrt{a_1 \dots a_n}} \int_{t_1^2 + \dots + t_n^2 \leqslant 1} dt_1 \dots dt_n = \mu(S)\,\mathrm{Vol}(B)$$

Proposition La fonction μ est strictement convexe sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Soient $R, S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
D'après le théorème de Réduction simultanée de deux formes quadratiques, il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $\Delta = \mathrm{diag}(b_1, \dots, b_n)$, $\Delta' = \mathrm{diag}(c_1, \dots, c_n)$ avec $b_i > 0, c_i > 0$, telles que :
$$R = {}^tP \Delta P \quad \text{et} \quad S = {}^tP \Delta' P$$
Pour tout $t \in]0,1[$,
$$t\Delta + (1-t)\Delta' \text{ est diagonale à coefficients } > 0 \quad \text{donc} \quad tR + (1-t)S = {}^tP(t\Delta + (1-t)\Delta')P \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}).$$
On peut appliquer μ,
$$\mu(tR + (1-t)S) = |\det P|^{-1} \prod_{i=1}^n (t b_i + (1-t) c_i)^{-1/2}$$

Or la fonction $\ln$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $\ln(tx + (1-t)y) \geqslant t \ln x + (1-t) \ln y$ et en passant à l'exponentielle $tx + (1-t)y \geqslant x^t y^{1-t}$.
Donc :
$$\mu(tR + (1-t)S) \leqslant |\det P|^{-1} \prod_{i=1}^n (b_i^t c_i^{1-t})^{-1/2} \leqslant |\det P|^{-1} \left(t \prod_{i=1}^n b_i^{-1/2} + (1-t) \prod_{i=1}^n c_i^{-1/2}\right)$$
i.e.
$$\mu(tR + (1-t)S) \leqslant t\mu(R) + (1-t)\mu(S)$$
avec égalité si et seulement si $b_i = c_i$ pour tout i par stricte concavité de $\ln$, i.e. si $R = S$. Ainsi, μ est strictement convexe sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Théorème Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$.
Il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K.

Comme K est borné, il existe $r > 0$ tel que $K \subset rB$.
Or, on a $rB = E_{S_+}$ avec $S_+ = \frac{1}{r^2} I_n$. On définit alors : $C = \{S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \mid \mu(S) \leqslant \mu(S_+),\ K \subset E_S\}$.

Montrons que C est fermé :
Soit $(S_k)_k \subset C$ telle que $S_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
Pour tous $x \in \mathbb{R}^n$, tout $k \in \mathbb{N}$,
$${}^t x S_k x \geqslant 0 \quad \text{donc } {}^t x S x \geqslant 0 \text{ par continuité du produit matriciel. Ainsi, } S \text{ est positive.}$$
De plus, par continuité du déterminant,
$$\mu(S_k) \longrightarrow \mu(S) \quad \text{donc } \mu(S) \leqslant \mu(S_+).$$
Alors $\det S \geqslant \det S_+ > 0$ donc $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Enfin pour $x \in K$, ${}^t x S_k x \leqslant 1$ donc ${}^t x S x \leqslant 1$. Ainsi : $K \subset E_S$.

Montrons que C est borné :

Comme K est d'intérieur non vide, il existe $b \in \mathbb{R}^n$ et $s > 0$ tel que $B(b,s) \subset K$.

Soient $S \in C$ et $\|x\| \leqslant s$, on a $x + b \in K \subset E_S$ donc $q_S(x+b) \leqslant 1$.

Or l'application $\sqrt{q_S}$ est une norme donc :

$$\sqrt{q_S(x)} \leqslant \sqrt{q_S(x+b)} + \sqrt{q_S(b)} \leqslant 1 + 1 \quad \text{car } b \in K$$

Donc :

$$q_S(x) \leqslant 4$$

Soient $\lambda \in Sp(S)$ et $x \in E_\lambda(S)$ de norme s. Alors :

$$\lambda \|x\|^2 = {}^t x S x = q_S(x) \leqslant 4 \quad \text{d'où } \lambda \leqslant \frac{4}{s^2} \quad \text{i.e. } \rho(S) = \|S\| \leqslant \frac{4}{s^2}$$

Ainsi, C est borné.

Montrons que C est convexe :

Soient $R, S \in C$ et $t \in [0,1]$.

On a alors $T = tS + (1-t)R \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ par convexité de ce dernier.

Et par convexité de μ,

$$\mu(T) \leqslant t\,\mu(S) + (1-t)\,\mu(R) \leqslant \mu(S_+)$$

Enfin pour $x \in K$,

$$q_T(x) = t\,q_S(x) + (1-t)\,q_R(x) \leqslant 1 \quad \text{donc } K \subset E_T$$

Donc, C est convexe.

Conclusion :

$\mu : C \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur C compact donc atteint son minimum sur C

De plus, C est convexe et μ est strictement convexe donc ce minimum est atteint en un unique point.